Μάθημα 7ο

10/11/15

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \end{array}$$

- $P(X_n = j) = p_j(n)$
- $P(X_n = j \mid X_0 = i) = p_{ij}^{(n)}$
- $\Pi_i = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_j^{(n)}$

$$\left.\begin{array}{l} P(X_n=0) = p_0(\ \ )p_{00} + p_1(\ \ )p_{10} \\ P(X_n=1) = p_0(n\ \ )p_{01} + p_1(\ \ )p_{11} \end{array}\right\} p^n = p^{(n-1)}p = p^{(0)}p^n$$

$$\left.\begin{array}{l} P(X_n=0) = P(X_0=0)\,p_{00}(n) + P(X_0=1)\,p_{10}^{(n)} \\ P(X_n=1) = P(X_0=0)\,p_{01}^{(n)} + P(X_0=1)\,p_{11}^{(n)} \end{array}\right\} p(n) = p^{(0)} \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$P^n = \begin{bmatrix} \dfrac{b + a(1-a-b)^n}{a+b} & \dfrac{a - a(1-a-b)^n}{a+b} \\ \dfrac{b - b(1-a-b)^n}{a+b} & \dfrac{a + b(1-a-b)^n}{a+b} \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.2.3 ΣΕΛ 33

Εναλλαγή βροχ.-στεγν. Μ.Α.

Ο παρακάτω πίνακας δίνει μετρήσεις 2437 ημερών

	ο	στεγν.	βροχ.
πραγμ. μέρα	στεγν.	1049	350
	βροχ.	351	687

i) P ?

ii) $p_{ij}^{(n)}$ $\forall i,j$, και n

iii) Αν η σημερινή μέρα είναι στεγνή μέρα, από πόσες μέρες αναμένεται να

ΛΥΣΗ:

X_n η στοχαστική διαδικασία που παριστάνει τον καιρό την n-οστή μέρα

Είναι στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο

$S = \{0 = \text{βροχερή},\ 1 = \text{στεγνή}\}$

i)

$$P=\begin{array}{c|cc} & \overset{1-a}{0} & \overset{a}{1} \\ \hline 0 & \frac{1049}{1049+350} & \frac{350}{1049+350} \\ 1 & \frac{351}{351+687} & \frac{687}{351+687} \\ & \beta & 1-\beta \end{array} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

ii) $P_{ij}^{(n)}$ είναι το (ij) στοιχείο του P^n

$$P_{00}^{(n)} = \frac{\beta + a(1-a-\beta)^n}{a+\beta} \quad , \quad P_{01}^{(n)} = \frac{a - a(1-a-\beta)^n}{a+\beta}.$$

iii) Σήμερα στεγνή, μετά από πόσες μέρες αναμένεται να βρέξει;

Εστω T η τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό του ημερών μέχρι την πρώτη βροχερή μέρα.

Δυνατές τιμές της T: $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ κ.ο.κ.

$ET = ?$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{διακριτή} \\ \text{τ.μ.}}}{ET} = \sum_{t=1}^{\infty} t P(T=t).$$

$P(T=1) = P(0 \to 1) = a.$

$P(T=2) = P(0 \to 0 \to 1) = (1-a) \cdot a$

$P(T=3) = P(0 \to 0 \to 0 \to 1) = (1-a) \cdot (1-a) a = (1-a)^2 \cdot a.$

$\vdots$

$P(T=t) = (1-a)^{t-1} \cdot a$

$$\boxed{\begin{array}{l} P(0 \to 0 \to 1) = P_{01}^{(2)} \\ P_{01}^{(2)} = P\left(0 \begin{array}{l} \to 0 \to \\ \to 1 \to \end{array} 1\right) \end{array}}$$

$$\boxed{(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (1)}$$

$$\boxed{(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \quad (2)}$$

Άρα, $ET = \sum_{t=1}^{\infty} t P(T=t) = \sum_{t=1}^{\infty} t (1-a)^{t-1} \cdot a =$

$= a \cdot \sum_{t=1}^{\infty} t (1-a)^{t-1} =$

$\overset{(2) \text{ για } x=1-a}{=\!=} a(1-(1-a))^{-2} =$

$= a \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a}$

ΑΣΚΗΣΗ 3.2.4. ΣΕΛ. 33

Αν ο ασθενής αντέδρασε σωστά τότε έχει πιθανότητα 70% να αντιδράσει σωστά στο επόμενο πείραμα. Αν αντέδρασε λάθος, τότε 40% να αντιδράσει σωστά στο επόμενο.

$S = \{0 = \text{Σωστή αντίδραση},\ 1 = \text{Λάθος αντίδραση}\}$.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}7 & \overset{a}{0{,}3} \\ \overset{b}{0{,}4} & 0{,}6 \end{bmatrix} \end{array}$$

1^{o} $\quad$ 5^{o}

$\boxed{\Sigma}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{\Sigma}$ $\qquad P_{00}^{(4)} = ?$

Αν στο 1^{o} πείραμα ο ασθενής αντέδρασε λανθασμένα, ποιά η πιθανότητα να είναι το 5^{o} πείραμα εκείνο στο οποίο ο ασθενής θα αντιδράσει σωστά για $1^{η}$ φορά;

$\boxed{\Lambda}\ \boxed{\Lambda}\ \boxed{\Lambda}\ \boxed{\Lambda}\ \boxed{\Sigma}$

1^{o} $\qquad$ 5^{o}

$(1-b)(1-b)(1-b)\cdot b.$ με $b = 0{,}4$.

ΑΣΚΗΣΗ 3.2.1. ΣΕΛ. 33

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \end{array}, \ a+b \neq 0,\ a+b \neq 1$$

Εαν $\mu_{ij}^{(n)}$ είναι ο αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων της κατάστασης j σε n βήματα ξεκινώντας από την i. Να προσδιοριστούν.

Έστω $X_{ij}^{(n)}$ ο αριθμός των επισκέψεων της κατάστασης j σε n βήματα ξεκινώντας από την i. Επομένως $\mu_{ij}^{(n)} = EX_{ij}^{(n)}$.

$$X_{ij}^{(n)} = Y_{ij}^{(1)} + Y_{ij}^{(2)} + Y_{ij}^{(3)} + \dots + Y_{ij}^{(n)}$$

$$Y_{ij}^{\overset{2\to n}{(1)}} = \begin{cases} 1, & \text{όταν επισκέπτεται } j \text{ ξεκινώντας από την } i \text{ στο } \overset{2\to n}{1^{o}} \text{ βήμα.} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$EX_{ij}^{(n)} = EY_{ij}^{(1)} + EY_{ij}^{(2)} + \dots + EY_{ij}^{(n)}$$

$$EX_{ij}^{(n)} = 1\cdot P(Y_{ij}^{(1)}=1) + 1\cdot P(Y_{ij}^{(2)}=1) + \cdots + 1\cdot P(Y_{ij}^{(n)}=1)$$
$$= p_{ij}^{(1)} + p_{ij}^{(2)} + \cdots + p_{ij}^{(n)}$$

$$\boxed{EY = \sum y P(Y=y)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.2.2. ΣΕΛ. 33

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-a & a \\ 1 & b & 1-b \end{array}$$

a_0: αριθμών των νέων χρονικών περιόδων που η διαδικασία παραμένει στην 0 μέχρι να μεταπηδήσει στην 1.
Κατανομή της a_0 και μέση τιμή?

ΛΥΣΗ:

Δυνατές τιμές της τ.μ. a_0: $0, 1, 2, \dots$

$P(a_0=0) = P(0\to 1) = a$

$P(a_0=1) = P(0\to 0\to 1) = (1-a)a$

$P(a_0=t) = (1-a)^t a \quad , t=0,1,\dots$

$$Ea_0 = \sum_{t=0}^{\infty} t\cdot a(1-a)^t = a\sum_{t=0}^{\infty} t(1-a)^{t-1}(1-a) =$$

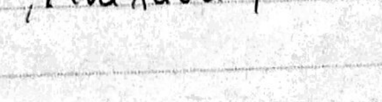
$$= a(1-a)\sum_{t=0}^{\infty} t(1-a)^{t-1} \overset{(2)}{=} a(1-a)\left[1-(1-a)\right]^{-2} = \frac{1-a}{a}$$

Μαρκοβιανές αλυσίδες με περισσότερες από 2 καταστάσεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Α.Τ.Π. με 2 φράγματα απορρόφησης.

Η Ελένη έχει 5€ και η Όλγα έχει 3€. Παίζουν ένα παιχνίδι και όποια χάσει δίνει στην άλλη 1€. Το παιχνίδι τελειώνει όταν κάποια από τις 2 μείνει χωρίς λεφτά.
Ισχύει $P(\text{να κερδίσει η } E) = p$, $P(\text{να χάσει η } E) = q$, $P(\text{ισοπαλία}) = 1-p-q$.

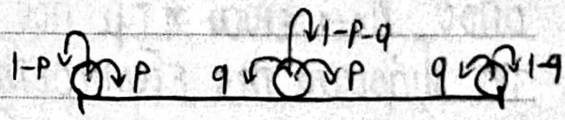
Έστω X_n κέρδος της Ε μετά το n-οστό παιχνίδι.



$S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$$P = \begin{array}{c|ccccccccc} & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 1-p-q & p & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 1-p-q & p \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Α.Τ.Π. με 2 φράγματα ανάκλασης.



$S = \{0, 1, 2, \dots, a\}$.

Πλήθος: $a+1$

$$P = \begin{array}{c|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & a-1 & a \\ \hline 0 & 1-p & p & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & q & 1-p-q & p & 0 & \cdots & & 0 \\ 2 & 0 & q & 1-p-q & p & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & & \cdots & & \\ \vdots & & & & & \cdots & & \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 1-q \end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: Σύστημα εξυπηρέτησης.

Θεωρείστε ένα σύστημα εξυπηρέτησης, πελάτες φτάνουν στο σύστημα και ο αριθμός των πελατών περιγράφεται από την κατανομή Poisson(λ) με ρυθμό αύξησης λ πελάτες στη μονάδα του χρόνου και εξυπηρετούνται από έναν υπάλληλο.

X_n είναι η στοχαστική διαδικασία που παριστάνει τον αριθμό των πελατών που είναι μέσα στο σύστημα αμέσως μετά το τέλος της εξυπηρέτησης του n-οστού πελάτη. Να αποδειχθεί πλήρως αν είναι Μ.Α. και να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης στις ακόλουθες περιπτώσεις:

α) Χρόνος εξυπ. σταθερός και ίσος με t χρονικές μονάδες

β) Χρόνος εξυπ. περιγράφεται από μια διακριτή τ.μ. με δυνατές τιμές $t_1, t_2, \dots, t_k$ χρον μονάδες και πιθανότητες $p_1, p_2, \dots, p_k$ αντίστοιχα δ) Ο χρόνος εξυπ. T ακολουθεί συνεχή καταν. με σ.π.π. $b(t)$

δ) $T \sim$ ευθ. (μ)

Πρόκειται για σ.δ. σε διακριτό χρόνο (μελετώ το σύστημα αμέσως μετά την εξυπηρέτηση) συγκεκριμένες χρονικές στιγμές

$S=\{0,1,2,\dots\}$.

Θα ελέγξουμε αν έχει τη Μ. Ιδιότητα.

$$X_{n+1}=\begin{cases} X_n-1+(A_{n+1}=B), & X_n\geq 1 \\ A_{n+1}=B, & X_n=0 \end{cases}$$

όπου A_{n+1} είναι η τ.μ. που περιγράφει τον αριθμό των αφίξεων πελατών κατά τη διάρκεια της εξυπηρέτησης του $n+1$ πελάτη.

Επειδή η κατανομή της εξυπηρέτησης δεν εξαρτάται από τη χρονική στιγμή μπορώ να πω ότι $A_{n+1}=B$, όπου B η τ.μ. που περιγράφει τον αριθμό των αφίξεων κατά τη διάρκεια μιας εξυπηρέτησης.

Το μέλλον εξαρτάται μόνο από το παρόν $\rightarrow$ έχω μαρκοβιανή ιδιότητα, είναι και ομογενής μαρκοβιανή αλυσίδα.

Θα προσδ. τη γενική μορφή του πίνακα μετάβασης.

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & \cdots \\ & & & & \end{pmatrix}\end{array}$$

$P(B=0)=b_0$

$P(B=1)=b_1$

$P(B=k)=b_k$

$b_k=P(B=k)=P($να έχω k αφίξεις κατά τη διάρκεια μιας εξυπηρέτησης$)$

Γνωρίζω ότι ο αριθμός των αφίξεων ακολουθεί Poisson με λ αφίξεις ανά 1 χρονική μονάδα

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: $X\sim P(\lambda)$, $P(X=x)=\dfrac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$, $x=0,1,2,\dots$

α) $b_k=P($να έχω k αφίξεις σε t χρον. μον.$)$ $(\text{Poisson}(\lambda t))$ $=\dfrac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$

$\left.\begin{array}{ll}\lambda \text{ αφίξεις σε} & 1 \text{ χρον. μον.} \\ ? & t \text{ χρον. μον.}\end{array}\right\} ?=\lambda t$

β) $b_k = P(B=k) = P($να έχω κ αφίξεις κατά τη διάρκεια μιας εξυπηρέτησης$) = \circledast$

$P(A) = P[(A \cap H_1) \cup \dots \cup (A \cap H_n)] = \sum P(A \cap H_i)$

$P(A) = \sum P(A \cap H_i)$

$\circledast = \sum_{n=1}^{\ell} P(\kappa \text{ αφίξεις} \mid \text{εξυπ. διαρ. } t_m) \cdot P(T = t_m)$

$= \sum_{n=1}^{\ell} \frac{(\lambda t_m)^k e^{-\lambda t_m}}{k!} p_i$

HW: 5, 24, 40, 46